Annexe D

Annexe technique

Caractérisation de l'état d'équilibre

Pour résoudre le problème d'optimisation de l'entreprise représentative, on utilise un Lagrangien et on laisse le multiplicateur sur la contrainte d'emprunt être μ_t sur la période *t*. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont alors :

$$Q_t(-1+\varphi\mu_t)+Q_{t+1}\left(\alpha A_t X_{t-1}^{\Theta} K_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}+1-\delta\right)=0$$

$$(1-\alpha)A_t X_{t-1}^{\Theta} K_{t-1}^{\alpha} N_t^{-\alpha}-w_t=0$$

$$Q_t(1-\mu_t)+Q_{t+1}\left(-(1+r_t)\right)=0$$

$$\mu_t(\varphi K_t-B_t^g)=0$$

où la dernière équation est la condition de relâchement comparative qui requiert soit $B_t^g=\varphi K_t$ et $\mu_t>0$, soit $B_t^g<\varphi K_t$ et $\mu_t=0$.

Après avoir rassemblé les termes, on obtient :

$$1=\frac{Q_{t+1}}{Q_t}\left(\alpha A_t X_{t-1}^{\Theta} K_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}+1-\delta\right)+\varphi\mu_t$$

$$w_t=(1-\alpha)A_t X_{t-1}^{\Theta} K_{t-1}^{\alpha} N_t^{-\alpha}$$

$$\mu_t=1-\frac{Q_{t+1}}{Q_t}(1+r_t)$$

En supposant que la contrainte d'emprunt s'applique de façon similaire à toutes les périodes, $B_t^g=\varphi K_t$, et on en déduit les équations (9) et (10) du texte principal.

En substituant (19) dans (18) on obtient $1-\varphi=\beta\left(\alpha\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(AX^{\Theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+1-\delta-\varphi(1+r)\right)$ qui établit le salaire d'état d'équilibre à :

$$w=(1-\alpha)\left(\frac{\alpha\beta\left(AX^{\Theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad (26)$$

La demande de travail (19) à l'état d'équilibre est donc :

$$N=\left(\frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)}{\alpha\beta AX^{\Theta}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}K \tag{27}$$

Les deux équations ci-dessus de même que l'équation (15) impliquent pour la consommation :

$$C=\frac{(1-\tau)\,(1-\alpha)}{\nu\alpha\beta}\,\frac{\left(\alpha\beta AX^{\Theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}}K}{(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

En substituant (27) dans (8), on obtient pour la production l'état d'équilibre suivant :

$$Y=\frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)}{\alpha\beta}K$$

En raison des rendements d'échelle constants dans le capital privé et le travail, la production à l'état d'équilibre est linéaire dans le capital privé. Les profits à l'état d'équilibre (20) sont :

$$\Pi=\frac{(1-\beta)(1-\varphi)}{\beta}K \tag{28}$$

Le revenu du foyer avant les taxes est donc :

$$\begin{aligned}&(wN+\Pi+(1+r)S)\\&=\frac{1-\alpha}{\alpha\beta}\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))K+\frac{(1-\beta)(1-\varphi)}{\beta}K+(1+r)(B^{g}+\varphi K)\\&=\frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)+\alpha\beta(\varphi-\delta)}{\alpha\beta}K+(1+r)B^{g}\end{aligned}$$

En substituant les équations (21) et (26) par (28) dans la contrainte budgétaire du foyer représentatif (17), on obtient une équation qui établit le stock de capital privé à l'état d'équilibre :

$$K=\frac{\dfrac{(1-\alpha)\left(\alpha\beta AX^{\Theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}-\dfrac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}(r-\tau-\tau r)B^{g}}{(1+\nu-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu\left(\dfrac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta\right)}$$

duquel toutes les autres variables suivent aisément en utilisant les équations ci-dessus de la manière suivante :

$$C=\frac{(1-\tau)\,(1-\alpha)}{\nu\alpha\beta\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\cdot\frac{\left[(\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\nu\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu(\frac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta)\right]+(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}(r-\tau-\tau r)B^{g}\right]}{(1+\nu-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu(\frac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta)}$$

$$N=\frac{(1-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}(r-\tau-\tau r)B^{g}\,(\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{-1}{1-\alpha}}}{(1+\nu-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu(\frac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta)}$$

Politiques budgétaires

Pour formuler le problème d'optimisation du gouvernement, notons que la contrainte budgétaire du gouvernement à l'état d'équilibre implique pour la dette à l'état d'équilibre :

$$B^{g}=\frac{\tau\,(1-\alpha)\,\frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)+\alpha\beta(\varphi-\delta)}{\alpha\beta\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}(\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}-\left((1+\nu-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu(\frac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta)\right)\delta X}{\left((1+\frac{\nu}{1-\tau}-\alpha)\left(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\frac{\nu}{1-\tau}\delta\right)\right)(r-\tau-\tau r)} \tag{29}$$

Le problème du gouvernement est donc :

$$max\,(\log(C_t)+\nu\log(1-N_t))$$

s.t.

$$B^{g}=$$

$$\frac{\tau\,(1-\alpha)\,\frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)+\alpha\beta(\varphi-\delta)}{\alpha\beta\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}(\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}-\left((1+\nu-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu(\frac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta)\right)\delta X}{\left((1+\frac{\nu}{1-\tau}-\alpha)\left(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\frac{\nu}{1-\tau}\delta\right)\right)(r-\tau-\tau r)}$$

où

$$C = \frac{(1-\tau)\,(1-\alpha)}{\nu\alpha\beta\,\left(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \cdot \frac{\left[\left(\alpha\beta AX^{\Theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\nu\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu(\frac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta)\right] + (1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}(r-\tau-\tau r)B^{g}\right]}{(1+\nu-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu(\frac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta)}$$

$$N = \frac{(1-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - (1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}(r-\tau-\tau r)B^{g}\left(\alpha\beta AX^{\Theta}\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}}}{(1+\nu-\alpha)\,(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))-\alpha\beta\nu(\frac{\tau}{1-\tau}\varphi+\delta)}$$

Après substitution de la contrainte budgétaire du gouvernement, prendre les dérivés de C et N en respectant les conditions de premier ordre (25) pour le capital public X revient à :

$$\begin{aligned}
&\left[1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\nu\left(\frac{\tau}{1-\tau}\phi+\delta\right)\right](\alpha\beta A)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\theta}{1-\alpha}X^{\frac{\theta}{1-\alpha}-1} \\
&\qquad \tau(1-\alpha)\frac{1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)+\alpha\beta(\phi-\delta)}{\alpha\beta\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}(\alpha\beta A)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\theta}{1-\alpha}X^{\frac{\theta}{1-\alpha}-1} \\
&+\frac{\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta}{1-\tau}\dfrac{-(1+\nu-\alpha)\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)+\alpha\beta\nu\left(\frac{\tau}{1-\tau}\phi+\delta\right)}{\left(1+\frac{\nu}{1-\tau}-\alpha\right)\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\frac{\nu}{1-\tau}\delta\right)}}{(\alpha\beta AX^{\theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}\nu\left[1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\left(\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\delta\right)\right]} \\
&\qquad \tau(1-\alpha)\frac{1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)+\alpha\beta(\phi-\delta)}{\alpha\beta\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\left(\alpha\beta AX^{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&+\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}\frac{-\left((1+\nu-\alpha)\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)-\alpha\beta\nu\left(\frac{\tau}{1-\tau}\phi+\delta\right)\right)\delta X}{\left(1+\frac{\nu}{1-\tau}-\alpha\right)\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\frac{\nu}{1-\tau}\delta\right)} \\
&=\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}\left[\frac{-(r-\tau-\tau r)\left(\alpha\beta AX^{\theta}\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}}}{\nu\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)-\alpha\beta\nu\left(\frac{\tau}{1-\tau}\phi+\delta\right)}\right. \\
&\left.+\frac{\tau(1-\alpha)\frac{1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)+\alpha\beta(\phi-\delta)}{\alpha\beta\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}-\left((1+\nu-\alpha)\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)\right)-\alpha\beta\nu\left(\frac{\tau}{1-\tau}\phi+\delta\right)\right)\delta X\left(\alpha\beta AX^{\theta}\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}}}{(1+\frac{\nu}{1-\tau}-\alpha)(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\frac{\nu}{1-\tau}\delta)}\right]
\end{aligned}$$

De la même manière, les conditions de premier ordre pour le taux d'imposition τ est :

$$\frac{1}{C(X,\tau)}\frac{dC}{d\tau}=\frac{\nu}{1-N(X,\tau)}\frac{dN}{d\tau}$$

où :

$$\frac{dC}{d\tau}=$$

$$\frac{-(1-\alpha)+\alpha\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{-1}\frac{1}{1-\tau}\varphi}{\nu\alpha\beta\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\;\frac{(\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\tau}{1-\tau}\nu(1-\alpha\beta)\varphi+\nu(1-\beta+\beta\delta)-\alpha\beta\nu\delta\right]+\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}(1-\beta)B^{g}}{\frac{\tau}{1-\tau}(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu)\varphi+(1+\nu-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)-\alpha\beta\nu\delta}$$

$$+\frac{(1-\tau)(1-\alpha)}{\nu\alpha\beta\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$\frac{\left((\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{1}{(1-\tau)^2}\nu(1-\alpha\beta)\varphi+\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta\nu}{(1-\tau)^2}(1-\beta)\left[\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{-1}\frac{1}{1-\tau}+1\right)B^{g}+(1-\tau)\frac{dB^{g}}{d\tau}\right]\right)}{\left[\frac{\tau}{1-\tau}(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu)\varphi+(1+\nu-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)-\alpha\beta\nu\delta\right]}$$

$$\frac{-\left((\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\tau}{1-\tau}\nu(1-\alpha\beta)\varphi+\nu(1-\beta+\beta\delta)-\alpha\beta\nu\delta\right]+\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}(1-\beta)B^{g}\right)\frac{1}{(1-\tau)^2}(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu)\varphi}{\left[\frac{\tau}{1-\tau}(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu)\varphi+(1+\nu-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)-\alpha\beta\nu\delta\right]^2}$$

$$\frac{dN}{d\tau}=\frac{1}{(1-\tau)^2}\;\frac{\left((1-\alpha)\varphi-\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha\beta\nu(1-\beta)(\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{-1}{1-\alpha}}\left[\left(\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{1-\tau}\frac{\varphi}{1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta}+1\right)B^{g}+(1-\tau)\frac{dB^{g}}{d\tau}\right]\right)}{\left[\frac{\tau}{1-\tau}(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu)\varphi+(1+\nu-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)-\alpha\beta\nu\delta\right]}$$

$$\frac{-\left((1-\alpha)\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)-\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\varphi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\alpha\beta\nu}{1-\tau}(1-\beta)B^{g}(\alpha\beta AX^{\Theta})^{\frac{-1}{1-\alpha}}\right)(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu)\varphi}{\left[\frac{\tau}{1-\tau}(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu)\varphi+(1+\nu-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)-\alpha\beta\nu\delta\right]^2}$$

et B^g donné par (29) et son dérivé par :

$$\frac{dB^g}{d\tau}=\frac{\beta}{1-\beta}\left(1+\frac{\nu}{1-\tau}-\alpha\right)^{-2}\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\frac{\nu}{1-\tau}\delta\right)^{-2}$$

$$\times\left((1-\alpha)(\alpha\beta AX^{\theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{1+\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\beta+\beta\delta+\alpha\beta(\phi-\delta)}{\alpha\beta\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right.\right.$$

$$\left.+\tau\frac{\alpha\beta\phi}{(1-\tau)^2}\frac{\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\beta+\beta\delta+\alpha\beta(\phi-\delta)\right)\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}}{\left(\alpha\beta\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^2}\right]$$

$$-\frac{\phi}{(1-\tau)^2}(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu\delta)\delta X$$

$$-\left[(1-\alpha)(\alpha\beta AX^{\theta})^{\frac{1}{1-\alpha}}\tau\frac{1+\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\beta+\beta\delta+\alpha\beta(\phi-\delta)}{\alpha\beta\left(1+\frac{\tau}{1-\tau}\phi-\beta+\beta\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right.$$

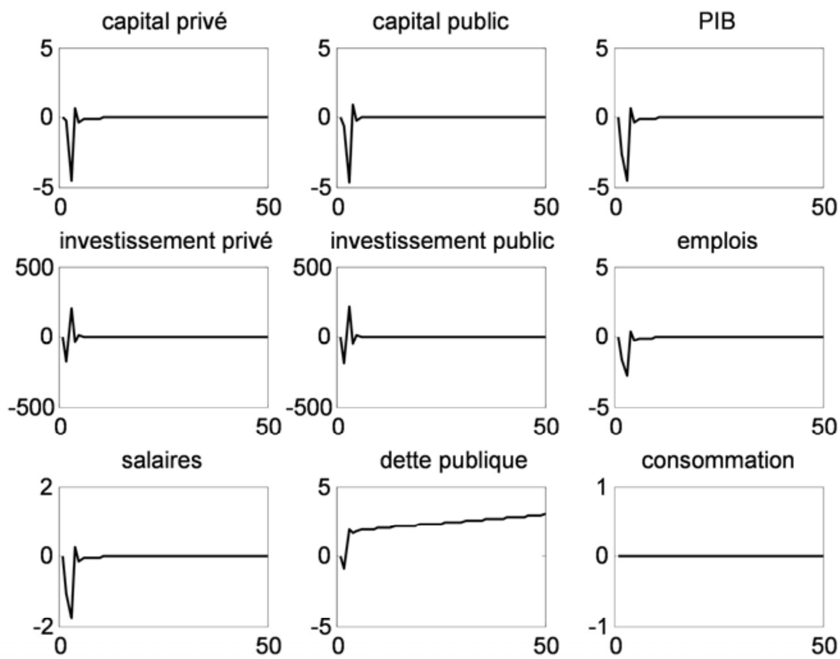
$$\left.-\left(\frac{\tau}{1-\tau}\phi(1+\nu-\alpha-\alpha\beta\nu\delta)+(1+\nu-\alpha)(1-\beta+\beta\delta)-\alpha\beta\nu\delta\right)\delta X\right]$$

$$\left.\times\frac{1}{(1-\tau)^2}\left[\nu\left(1-\phi+\beta(\phi(1+r)-1+\delta)-\alpha\beta\frac{\nu}{1-\tau}\delta\right)+\left(1+\frac{\nu}{1-\tau}-\alpha\right)(\phi-\alpha\beta\nu\delta)\right]\right)$$

Longue trajectoire de transition

Pour illustrer le comportement de long terme de l'économie, le graphique C.9 montre la trajectoire de trimestres après l'inondation pour le scénario 3A dans les conditions d'investissement publique optimales.

Graphique D.1. **Scénario 3A : Changement dans l'investissement public**



Extrait de :

Seine Basin, Île-de-France, 2014: Resilience to Major Floods

Accéder à cette publication :
https://doi.org/10.1787/9789264208728-en

Merci de citer ce chapitre comme suit :

OCDE (2014), « Annexe technique », dans *Seine Basin, Île-de-France, 2014: Resilience to Major Floods*, Éditions OCDE, Paris.

DOI: https://doi.org/10.1787/9789264207929-12-fr