

Annexe D

Annexe technique

Caractérisation de l'état d'équilibre

Pour résoudre le problème d'optimisation de l'entreprise représentative, on utilise un Lagrangien et on laisse le multiplicateur sur la contrainte d'emprunt être μ_t sur la période t . Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont alors :

$$Q_t(-1+\varphi\mu_t)+Q_{t+1}\left(\alpha A_t X_{t-1}^\Theta K_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} +1-\delta\right) = 0$$

$$(1-\alpha)A_t X_{t-1}^\Theta K_{t-1}^\alpha N_t^{-\alpha} - w_t = 0$$

$$Q_t(1-\mu_t)+Q_{t+1}\left(-(1+r_t)\right) = 0$$

$$\mu_t(\varphi K_t - B_t^S) = 0$$

où la dernière équation est la condition de relâchement comparative qui requiert soit $B_t^S = \varphi K_t$ et $\mu_t > 0$, soit $B_t^S < \varphi K_t$ et $\mu_t = 0$.

Après avoir rassemblé les termes, on obtient :

$$1 = \frac{Q_{t+1}}{Q_t} \left(\alpha A_t X_{t-1}^\Theta K_{t-1}^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + 1 - \delta \right) + \varphi \mu_t$$

$$w_t = (1-\alpha)A_t X_{t-1}^\Theta K_{t-1}^\alpha N_t^{-\alpha}$$

$$\mu_t = 1 - \frac{Q_{t+1}}{Q_t} (1+r_t)$$

En supposant que la contrainte d'emprunt s'applique de façon similaire à toutes les périodes, $B_t^S = \varphi K_t$, et on en déduit les équations (9) et (10) du texte principal.

En substituant (19) dans (18) on obtient $1-\varphi=\beta\left(\alpha\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(AX^\Theta\right)^{\frac{1}{\alpha}}+1-\delta-\varphi(1+r)\right)$ qui établit le salaire d'état d'équilibre à :

$$w = (1-\alpha) \left(\frac{\alpha\beta\left(AX^\Theta\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (26)$$

La demande de travail (19) à l'état d'équilibre est donc :

$$N = \left(\frac{1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta)}{\alpha\beta AX^{\Theta}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K \quad (27)$$

Les deux équations ci-dessus de même que l'équation (15) impliquent pour la consommation :

$$C = \frac{(1-\tau)(1-\alpha) \left(\alpha\beta AX^{\Theta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta)) \frac{1}{1-\alpha} K}{\frac{\alpha}{1-\alpha} (1-\varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta))}$$

En substituant (27) dans (8), on obtient pour la production l'état d'équilibre suivant :

$$Y = \frac{1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta)}{\alpha\beta} K$$

En raison des rendements d'échelle constants dans le capital privé et le travail, la production à l'état d'équilibre est linéaire dans le capital privé. Les profits à l'état d'équilibre (20) sont :

$$\Pi = \frac{(1-\beta)(1-\varphi)}{\beta} K \quad (28)$$

Le revenu du foyer avant les taxes est donc :

$$\begin{aligned} & (wN + \Pi + (1+r)S) \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha\beta} (1-\varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta)) K + \frac{(1-\beta)(1-\varphi)}{\beta} K + (1+r)(B^g + \varphi K) \\ &= \frac{1-\varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta) + \alpha\beta(\varphi - \delta)}{\alpha\beta} K + (1+r)B^g \end{aligned}$$

En substituant les équations (21) et (26) par (28) dans la contrainte budgétaire du foyer représentatif (17), on obtient une équation qui établit le stock de capital privé à l'état d'équilibre :

$$K = \frac{\frac{(1-\alpha) \left(\alpha\beta AX^{\Theta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{\alpha\beta v}{1-\tau} (r - \tau - \tau r) B^g}{(1+v-\alpha) (1-\varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right)}$$

duquel toutes les autres variables suivent aisément en utilisant les équations ci-dessus de la manière suivante :

$$C = \frac{(1-\tau)(1-\alpha)}{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{\left[\begin{array}{c} \frac{1}{1-\alpha} \\ (\alpha\beta AX^\Theta) \left[v(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right) \right] \\ + (1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) \frac{1}{1-\alpha} \frac{\alpha\beta v}{1-\tau} (r-\tau-tr) B^G \end{array} \right]}{(1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right)}$$

$$N = \frac{(1-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - (1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) \frac{1}{1-\alpha} \frac{\alpha\beta v}{1-\tau} (r-\tau-tr) B^G (\alpha\beta AX^\Theta) \frac{-1}{1-\alpha}}{(1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right)}$$

Politiques budgétaires

Pour formuler le problème d'optimisation du gouvernement, notons que la contrainte budgétaire du gouvernement à l'état d'équilibre implique pour la dette à l'état d'équilibre :

$$B^G = \frac{\tau(1-\alpha) \frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)+\alpha\beta(\varphi-\delta)}{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (\alpha\beta AX^\Theta) \frac{1}{1-\alpha} - \left((1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right) \right) \delta X}{\alpha\beta(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))} \quad (29)$$

$$\left(\left(1 + \frac{v}{1-\tau} - \alpha \right) \left(1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha\beta \frac{v}{1-\tau} \delta \right) \right) (r - \tau - tr)$$

Le problème du gouvernement est donc :

$$\max (\log(C_t) + v \log(1 - N_t))$$

s.t.

$$B^G = \frac{\tau(1-\alpha) \frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)+\alpha\beta(\varphi-\delta)}{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (\alpha\beta AX^\Theta) \frac{1}{1-\alpha} - \left((1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right) \right) \delta X}{\alpha\beta(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))}$$

$$\left(\left(1 + \frac{v}{1-\tau} - \alpha \right) \left(1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha\beta \frac{v}{1-\tau} \delta \right) \right) (r - \tau - tr)$$

où

$$C = \frac{(1-\tau)(1-\alpha)}{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{\left[\begin{array}{c} \frac{1}{1-\alpha} \\ (\alpha\beta AX^\theta) \left[v(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right) \right] \\ \frac{1}{1-\alpha} \\ + (1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) \frac{\alpha\beta v}{1-\tau} (r-\tau-\tau r) B^S \end{array} \right]}{(1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right)}$$

$$N = \frac{(1-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - (1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) \frac{1}{1-\alpha} \frac{\alpha\beta v}{1-\tau} (r-\tau-\tau r) B^S (\alpha\beta AX^\theta) \frac{-1}{1-\alpha}}{(1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right)}$$

Après substitution de la contrainte budgétaire du gouvernement, prendre les dérivés de C et N en respectant les conditions de premier ordre (25) pour le capital public X revient à :

$$\begin{aligned} & \left[1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right) \right] (\alpha\beta A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\theta}{1-\alpha} X^{\frac{\theta}{1-\alpha}-1} \\ & \quad \frac{\tau(1-\alpha) \frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta) + \alpha\beta(\varphi-\delta)}{\alpha\beta(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} (\alpha\beta A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\theta}{1-\alpha} X^{\frac{\theta}{1-\alpha}-1}}{\alpha\beta(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \\ & + \frac{(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha\beta}{1-\tau} \frac{-(1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) + \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right)}{\left(1 + \frac{v}{1-\tau} - \alpha \right) \left(1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha\beta \frac{v}{1-\tau} \delta \right)}}{(\alpha\beta AX^\theta)^{\frac{1}{1-\alpha v}} \left[1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha\beta \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right) \right]} \\ & \quad \frac{\tau(1-\alpha) \frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta) + \alpha\beta(\varphi-\delta)}{\alpha\beta(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} (\alpha\beta AX^\theta)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\alpha\beta(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \\ & + (1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha\beta v}{1-\tau} \frac{-\left((1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right) \right) \delta X}{\left(1 + \frac{v}{1-\tau} - \alpha \right) \left(1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha\beta \frac{v}{1-\tau} \delta \right)} \\ & = (1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha\beta v}{1-\tau} \left[\frac{-(r-\tau-\tau r)(\alpha\beta AX^\theta)^{\frac{-1}{1-\alpha}}}{v(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\tau(1-\alpha) \frac{1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta) + \alpha\beta(\varphi-\delta)}{\alpha\beta(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} - \left((1+v-\alpha)(1-\varphi+\beta(\varphi(1+r)-1+\delta)) - \alpha\beta v \left(\frac{\tau}{1-\tau} \varphi + \delta \right) \right) \delta X (\alpha\beta AX^\theta)^{\frac{-1}{1-\alpha}}}{\left(1 + \frac{v}{1-\tau} - \alpha \right) \left(1 - \varphi + \beta(\varphi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha\beta \frac{v}{1-\tau} \delta \right)} \right] \end{aligned}$$

De la même manière, les conditions de premier ordre pour le taux d'imposition τ est :

$$\frac{1}{C(X,\tau)} \frac{dC}{d\tau} = \frac{v}{1-N(X,\tau)} \frac{dN}{d\tau}$$

où :

$$\frac{dC}{d\tau} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{- (1-\alpha) + \alpha \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{-1} \frac{1}{1-\tau} \phi \left(\alpha \beta A X^\theta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\tau}{1-\tau} v(1-\alpha \beta) \phi + v(1-\beta + \beta \delta) - \alpha \beta v \delta \right] + \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha \beta v}{1-\tau} (1-\beta) B^g}{v \alpha \beta \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\tau}{1-\tau} (1+v-\alpha-\alpha \beta v) \phi + (1+v-\alpha)(1-\beta + \beta \delta) - \alpha \beta v \delta} \\
& + \frac{(1-\tau)(1-\alpha)}{v \alpha \beta \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \\
& \left(\left(\alpha \beta A X^\theta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{(1-\tau)^2} v(1-\alpha \beta) \phi + \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha \beta v}{(1-\tau)^2} (1-\beta) \left[\left(\frac{1}{1-\alpha} \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{-1} \frac{1}{1-\tau} + 1\right) B^{g+(1-\tau)} \frac{dB^g}{d\tau}\right] \right. \\
& \quad \left. \left[\frac{\tau}{1-\tau} (1+v-\alpha-\alpha \beta v) \phi + (1+v-\alpha)(1-\beta + \beta \delta) - \alpha \beta v \delta \right] \right. \\
& \quad \left. - \left(\left(\alpha \beta A X^\theta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\tau}{1-\tau} v(1-\alpha \beta) \phi + v(1-\beta + \beta \delta) - \alpha \beta v \delta \right] + \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha \beta v}{1-\tau} (1-\beta) B^g \right) \frac{1}{(1-\tau)^2} (1+v-\alpha-\alpha \beta v) \phi \right. \\
& \quad \left. \left[\frac{\tau}{1-\tau} (1+v-\alpha-\alpha \beta v) \phi + (1+v-\alpha)(1-\beta + \beta \delta) - \alpha \beta v \delta \right]^2 \right. \\
& \quad \left. \left((1-\alpha) \phi - \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha \beta v (1-\beta) \left(\alpha \beta A X^\theta\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \left[\left(\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{1-\tau} \frac{\phi}{1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta} + 1\right) B^{g+(1-\tau)} \frac{dB^g}{d\tau}\right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left[\frac{\tau}{1-\tau} (1+v-\alpha-\alpha \beta v) \phi + (1+v-\alpha)(1-\beta + \beta \delta) - \alpha \beta v \delta \right] \right. \\
& \quad \left. - \left((1-\alpha) \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right) - \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha \beta v}{1-\tau} (1-\beta) B^g \left(\alpha \beta A X^\theta\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. (1+v-\alpha-\alpha \beta v) \phi \right) \right. \\
& \quad \left. \left[\frac{\tau}{1-\tau} (1+v-\alpha-\alpha \beta v) \phi + (1+v-\alpha)(1-\beta + \beta \delta) - \alpha \beta v \delta \right]^2 \right) \\
\frac{dN}{d\tau} &= \frac{1}{(1-\tau)^2}
\end{aligned}$$

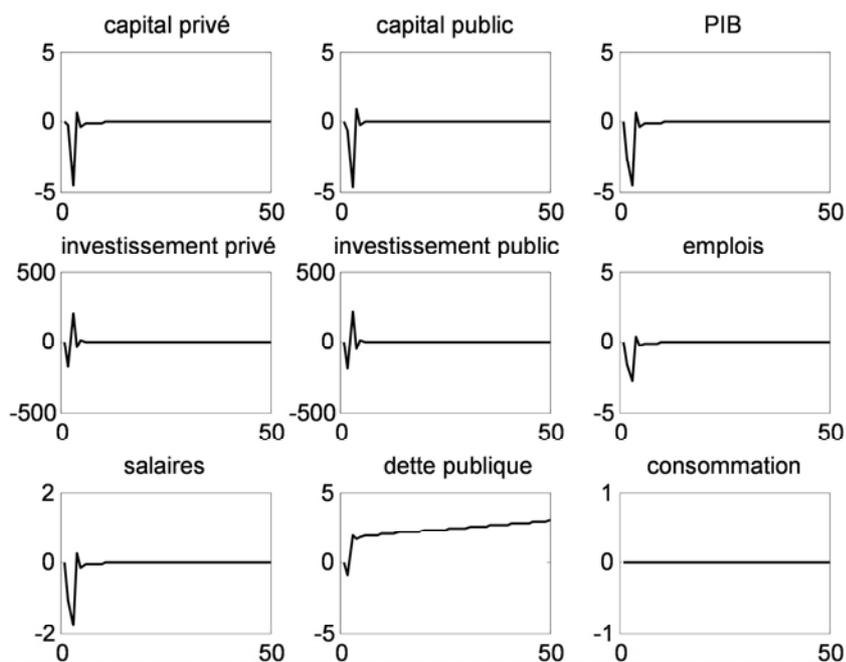
et B^g donné par (29) et son dérivé par :

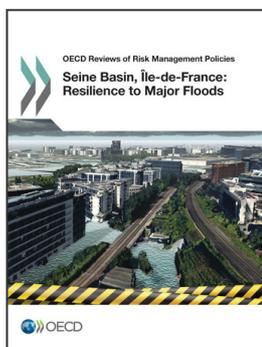
$$\begin{aligned}
\frac{dB^g}{d\tau} &= \frac{\beta}{1-\beta} \left(1 + \frac{v}{1-\tau} - \alpha\right)^{-2} \left(1 - \phi + \beta(\phi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha \beta \frac{v}{1-\tau} \delta\right)^{-2} \\
& \times \left((1-\alpha) \left(\alpha \beta A X^\theta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta + \alpha \beta (\phi - \delta)}{\alpha \beta \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tau \frac{\alpha \beta \phi}{(1-\tau)^2} \frac{\left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta + \alpha \beta (\phi - \delta)\right) \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha} - 1}}{\left(\alpha \beta \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^2} \right] \right. \\
& \quad - \frac{\phi}{(1-\tau)^2} (1+v-\alpha-\alpha \beta v \delta) \delta X \\
& \quad - \left[(1-\alpha) \left(\alpha \beta A X^\theta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta + \alpha \beta (\phi - \delta)}{\alpha \beta \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau} \phi - \beta + \beta \delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{\tau}{1-\tau} \phi(1+v-\alpha-\alpha \beta v \delta) + (1+v-\alpha)(1-\beta + \beta \delta) - \alpha \beta v \delta\right) \delta X \right] \\
& \quad \left. \times \frac{1}{(1-\tau)^2} \left[v \left(1 - \phi + \beta(\phi(1+r) - 1 + \delta) - \alpha \beta \frac{v}{1-\tau} \delta\right) + \left(1 + \frac{v}{1-\tau} - \alpha\right) (\phi - \alpha \beta v \delta) \right] \right)
\end{aligned}$$

Longue trajectoire de transition

Pour illustrer le comportement de long terme de l'économie, le graphique C.9 montre la trajectoire de trimestres après l'inondation pour le scénario 3A dans les conditions d'investissement publique optimales.

Graphique D.1. Scénario 3A : Changement dans l'investissement public





Extrait de :

Seine Basin, Île-de-France, 2014: Resilience to Major Floods

Accéder à cette publication :

<https://doi.org/10.1787/9789264208728-en>

Merci de citer ce chapitre comme suit :

OCDE (2014), « Annexe technique », dans *Seine Basin, Île-de-France, 2014: Resilience to Major Floods*, Éditions OCDE, Paris.

DOI: <https://doi.org/10.1787/9789264207929-12-fr>

Cet ouvrage est publié sous la responsabilité du Secrétaire général de l'OCDE. Les opinions et les arguments exprimés ici ne reflètent pas nécessairement les vues officielles des pays membres de l'OCDE.

Ce document et toute carte qu'il peut comprendre sont sans préjudice du statut de tout territoire, de la souveraineté s'exerçant sur ce dernier, du tracé des frontières et limites internationales, et du nom de tout territoire, ville ou région.

Vous êtes autorisés à copier, télécharger ou imprimer du contenu OCDE pour votre utilisation personnelle. Vous pouvez inclure des extraits des publications, des bases de données et produits multimédia de l'OCDE dans vos documents, présentations, blogs, sites Internet et matériel d'enseignement, sous réserve de faire mention de la source OCDE et du copyright. Les demandes pour usage public ou commercial ou de traduction devront être adressées à rights@oecd.org. Les demandes d'autorisation de photocopier une partie de ce contenu à des fins publiques ou commerciales peuvent être obtenues auprès du Copyright Clearance Center (CCC) info@copyright.com ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC) contact@cfcopies.com.