4

Cadre d'évaluation de la culture mathématique de l'enquête PISA 2015

Le présent chapitre définit la « culture mathématique » telle qu'elle est évaluée dans le cadre du Programme international de l'OCDE pour le suivi des acquis des élèves (PISA) en 2015 et établit les savoir-faire auxquels la culture mathématique fait appel. Il explique les processus, les contenus et les contextes tels qu'ils se présentent dans les problèmes mathématiques, et décrit la manière dont la performance des élèves en mathématiques est mesurée et présentée.

La culture mathématique est un domaine mineur dans cette enquête PISA 2015, ce qui permet d'établir des comparaisons de la performance des élèves au fil du temps. Le présent cadre d'évaluation utilise la même description et les mêmes illustrations de l'évaluation de la culture mathématique que celles présentées dans le cadre d'évaluation de 2012, quand la culture mathématique a été revisitée et actualisée en qualité de domaine majeur d'évaluation de l'enquête cette année-là.

Dans le cadre de l'enquête PISA 2015, l'informatique représente le principal mode d'administration pour tous les domaines d'évaluation, y compris la culture mathématique. Toutefois, la version papier-crayon des épreuves est fournie aux pays qui choisissent de ne pas évaluer leurs élèves sur ordinateur. Les épreuves informatisées comme celles papier-crayon utilisent les mêmes blocs d'items d'ancrage de culture mathématique. Le nombre d'items d'ancrage dans les domaines mineurs d'évaluation est revu à la hausse par rapport aux épreuves PISA administrées lors des enquêtes précédentes. En conséquence, la couverture du *construct* est élargie, tout en réduisant le nombre d'élèves répondant à chaque question. Cette conception de l'enquête vise à réduire les biais potentiels, tout en stabilisant et en améliorant la mesure des tendances.

Dans l'enquête PISA 2012, l'épreuve informatisée des mathématiques était facultative et n'a pas été administrée par tous les pays participants ; elle n'est donc pas incluse dans l'analyse des tendances en culture mathématique. En conséquence de quoi, les items de l'épreuve informatisée mis au point dans le cadre de PISA 2012 ne sont pas inclus dans l'enquête de 2015 où la culture mathématique est un domaine mineur d'évaluation, et ce malgré la modification apportée au mode d'administration.

Le cadre d'évaluation a été revu et modifié pour tenir compte des changements intervenus dans le mode d'administration. Il présente des réflexions sur la transposition des items papier-crayon sur écran et des exemples concrets des résultats qui en découlent. En revanche, la définition de la culture mathématique et les *constructs* de la culture mathématique utilisés en 2015 sont restés identiques à ceux utilisés en 2012.

Le cadre d'évaluation de la culture mathématique de l'enquête PISA 2015 se divise en plusieurs grandes sections. La première section, « Définition de la culture mathématique », décrit les fondements théoriques de l'épreuve PISA de mathématiques et définit le *construct* de culture mathématique. La deuxième section, « Organisation du domaine de la culture mathématique », décrit trois aspects : a) les *processus* mathématiques et les *facultés mathématiques fondamentales* qui sous-tendent ces processus (appelées « compétences » dans les cadres d'évaluation antérieurs) ; b) les catégories de *contenus* mathématiques pertinents pour les élèves âgés de 15 ans et la façon dont ils s'organisent dans le cadre d'évaluation de l'enquête PISA 2015 ; et c) les *contextes* dans lesquels s'inscrivent les tâches mathématiques soumises aux élèves. La troisième section, « Évaluation de la culture mathématique », décrit l'approche utilisée pour mettre en œuvre les éléments du cadre décrit précédemment, notamment la structure de l'enquête, la transposition vers une évaluation informatisée et les niveaux de compétences. Le cadre d'évaluation de l'enquête PISA 2012 a été rédigé sous la direction du groupe d'experts chargé des mathématiques (*Mathematics Expert Group*, MEG), nommés par les principaux contractants PISA après approbation du Comité directeur PISA (*PISA Governing Board*, PGB). Au nombre des dix membres du MEG figurent des mathématiciens, des professeurs de mathématiques et des spécialistes en évaluation, en technologie et en pédagogie de divers pays. Par ailleurs, une version préliminaire de ce cadre d'évaluation de la culture mathématique a été soumise pour commentaires à plus de 170 experts en mathématiques de plus d'une quarantaine de pays, dans le but de susciter l'apport de contributions plus larges et de garantir sa révision approfondie. Achieve et l'Australian Council for Educational Research (ACER), les deux organisations choisies par l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE) pour gérer l'élaboration du cadre d'évaluation, ont également mené diverses recherches pour éclairer la conception du cadre et l'étayer. L'enquête PISA et l'élaboration du cadre d'évaluation ont de façon générale bénéficié des travaux actuels dans des pays participants (par exemple, les recherches décrites dans la publication OCDE, 2010). Le cadre d'évaluation de PISA 2015 a été actualisé sous la direction du MEG, groupe nommé par le contractant en charge des cadres conceptuels après approbation du Comité directeur PISA.

DÉFINITION DE LA CULTURE MATHÉMATIQUE

Comprendre les mathématiques est essentiel pour préparer les jeunes à vivre dans une société moderne. Il faut s'appuyer sur un certain degré de compréhension des mathématiques et sur des facultés de raisonnement mathématique et d'utilisation des mathématiques pour pouvoir appréhender un nombre croissant de situations et de problèmes qui surviennent dans la vie courante, y compris dans le cadre professionnel, et pouvoir y faire face. Les mathématiques sont un outil indispensable pour permettre aux jeunes d'appréhender les problèmes qui surviennent dans différents contextes – personnel, professionnel, sociétal ou scientifique. Dans ce contexte, il est important de déterminer dans quelle

mesure les jeunes approchant du terme de leur scolarité sont préparés à utiliser les mathématiques pour comprendre des enjeux importants et résoudre des problèmes. Évaluer les jeunes à l'âge de 15 ans permet de montrer par anticipation comment les individus sont susceptibles de réagir plus tard dans la vie dans un large éventail de situations en rapport avec les mathématiques.

Le *construct* de la culture mathématique présenté dans ce rapport cherche à définir la capacité des individus à mener un raisonnement mathématique et à utiliser des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Cette conception de la culture mathématique confirme combien il est important que les élèves parviennent à bien comprendre des concepts de mathématiques pures et à se rendre compte des avantages qu'il y a à s'engager dans l'exploration du monde abstrait des mathématiques. Le *construct* PISA de culture mathématique insiste fortement sur la nécessité de développer chez les élèves la faculté d'utiliser les mathématiques en contexte ; il est important qu'ils vivent de riches expériences lors de leurs cours de mathématiques pour y parvenir. L'encadré 4.1 ci-après présente la définition de la culture mathématique retenue dans le cadre de l'enquête PISA 2012.

Encadré 4.1 **La définition de la culture mathématique dans l'enquête PISA 2015**

La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à formuler, employer et interpréter des mathématiques dans un éventail de contextes, soit à se livrer à un raisonnement mathématique et à utiliser des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Elle aide les individus à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde et à se comporter en citoyens constructifs, engagés et réfléchis, c'est-à-dire à poser des jugements et à prendre des décisions en toute connaissance de cause.

La même définition a été utilisée dans l'enquête PISA 2012.

La définition de la culture mathématique insiste sur la notion d'engagement actif dans les mathématiques et vise le raisonnement mathématique et l'utilisation de concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Les verbes « formuler », « employer » et « interpréter » désignent plus particulièrement les trois processus dans lesquels les élèves s'engagent en tant qu'acteurs de la résolution de problèmes.

Cette définition de la culture mathématique retenue en vue de l'enquête PISA 2015 vise également à intégrer la notion de modélisation mathématique, qui est depuis toujours une pierre angulaire du cadre d'évaluation de l'enquête PISA (OCDE, 2004). À mesure qu'ils utilisent les mathématiques et les outils mathématiques pour résoudre des problèmes contextualisés, les individus enchaînent des étapes (développées de façon individuelle ci-après dans le document).

Le cycle de modélisation mathématique est au cœur de la conception des élèves dans l'enquête PISA, en l'occurrence comme acteurs de la résolution de problèmes. Toutefois, il est souvent inutile de se livrer à chaque étape du cycle de modélisation, en particulier lors d'une évaluation (Niss et al., 2007). Il est fréquent que celui qui tente de résoudre le problème n'ait à entreprendre que quelques étapes du cycle de modélisation (par exemple, lors de l'utilisation de graphiques) ou répète le cycle plusieurs fois dans le but de corriger des hypothèses ou des décisions.

La définition reconnaît également que la culture mathématique aide les individus à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde, ainsi qu'à poser des jugements fondés et à prendre des décisions en toute connaissance de cause, autant de capacités nécessaires pour être des citoyens constructifs, engagés et réfléchis.

Les outils mathématiques évoqués dans la définition font référence à tout un ensemble d'appareils, d'équipements numériques, de logiciels et de systèmes de calcul. La version informatisée de l'enquête en 2015 inclut une calculatrice en ligne qui peut être utilisée pour répondre à certaines questions.

ORGANISATION DU DOMAINE DE LA CULTURE MATHÉMATIQUE

Le cadre PISA de culture mathématique définit le domaine de la culture mathématique tel que l'enquête PISA l'évalue et décrit l'approche adoptée pour mesurer la culture mathématique des élèves de 15 ans. En fait, l'enquête PISA cherche à déterminer dans quelle mesure les élèves de 15 ans sont capables de faire une utilisation judicieuse des mathématiques dans les situations et problèmes (dont la plupart s'inscrivent dans des contextes s'inspirant du monde réel) qui se présentent à eux.

La définition de la culture mathématique retenue à l'occasion de l'enquête PISA 2015 englobe trois aspects interdépendants :

- les processus mathématiques qui décrivent ce que font des individus pour établir un lien entre le contexte du problème et les mathématiques et, donc, pour résoudre le problème, ainsi que les facultés qui sous-tendent ces processus
- les contenus mathématiques qui doivent être utilisés pour répondre aux items
- les contextes dans lesquels les items s'inscrivent.

Les sections suivantes développent ces aspects. Le cadre d'évaluation de la culture mathématique de l'enquête PISA 2012, qui est également utilisé dans l'enquête PISA 2015, met ces aspects en évidence de manière à ce que les items mis au point reflètent un éventail varié de processus, de contenus et de contextes, et qu'ensemble, ils traduisent concrètement et fidèlement la culture mathématique telle qu'elle est définie ici. Afin d'illustrer les aspects de la culture mathématique, des exemples sont fournis dans le *Cadre d'évaluation et d'analyse du cycle PISA 2012* (OCDE, 2013) et sur le site Internet de PISA (www.oecd.org/pisa/).

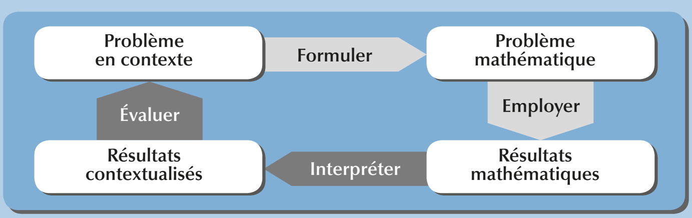
Plusieurs questions dérivées de la définition de la culture mathématique retenue à l'occasion de l'enquête PISA 2015 sont à la base de cette section, notamment :

- Quels sont les processus dans lesquels les individus s'engagent lorsqu'ils résolvent des problèmes de mathématiques en contexte ? Quelles compétences attendons-nous qu'ils exploitent à mesure qu'ils enrichissent leur culture mathématique ?
- Quels contenus mathématiques attendons-nous que les individus – en particulier les élèves de 15 ans – maîtrisent ?
- Dans quels contextes la culture mathématique peut-elle s'observer et s'évaluer ?

Graphique 4.1 ▪ **Modélisation de la culture mathématique en pratique**

Problèmes se posant dans le monde réel
Catégories de contenus mathématiques :
quantité ; incertitude et données ; variations et relations ; espace et formes
Catégories de contextes de la vie réelle : personnel ; sociétal ; professionnel ; scientifique

Pensée et acte mathématiques
Concepts, connaissances et compétences mathématiques
Facultés mathématiques fondamentales :
communication ; représentation ; conception de stratégies ; mathématisation ; raisonnement et argumentation ; utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique ; utilisation d'outils mathématiques
Processus : formuler ; employer ; interpréter/évaluer



Processus mathématiques et facultés mathématiques qui les sous-tendent

Les processus mathématiques

Par définition, la culture mathématique renvoie à la capacité des individus de formuler, d'employer et d'interpréter les mathématiques. Ces trois verbes – formuler, employer et interpréter – constituent à eux seuls une structure signifiante permettant de définir les processus mathématiques qui décrivent ce que les individus font pour établir un lien entre le contexte d'un problème et les mathématiques, et donc, pour résoudre le problème. Les items de l'évaluation de la culture mathématique de l'enquête PISA 2015 sont associés à l'un de ces trois processus mathématiques :

- formuler des situations de façon mathématique
- employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques
- interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques.

Il est important, tant pour les décideurs que pour les professionnels impliqués plus directement dans l’instruction des élèves, de savoir dans quelle mesure les adolescents sont capables de s’engager dans chacun de ces processus. Le processus de *formulation* montre dans quelle mesure les élèves sont capables d’identifier et reconnaître des possibilités d’utiliser les mathématiques dans le contexte d’un problème, puis de proposer la structure mathématique requise pour formuler le problème contextualisé sous la forme d’un problème mathématique. Le processus d’*emploi* des mathématiques montre dans quelle mesure les élèves sont capables d’effectuer des calculs et des manipulations, et d’appliquer les concepts et les faits qu’ils connaissent pour proposer une solution mathématique à un problème formulé de façon mathématique. Le processus d’*interprétation* montre dans quelle mesure les élèves sont capables de réfléchir à des conclusions ou des solutions mathématiques, de les interpréter dans le contexte d’un problème qui s’inspire du monde réel et de déterminer si les conclusions ou les résultats sont plausibles. La facilité avec laquelle les élèves appliquent les mathématiques dans des problèmes ou des situations dépend de compétences inhérentes à ces trois processus. L’évaluation de leur aisance dans chaque processus peut éclairer les décideurs, alimenter leurs débats et les aider à prendre des décisions plus en prise avec la réalité des classes.

Formuler des situations de façon mathématique

Dans la définition de la culture mathématique, le verbe *formuler* renvoie à la capacité des individus d’identifier et de reconnaître des possibilités d’utiliser les mathématiques dans le contexte d’un problème, puis de structurer sous forme mathématique un problème présenté jusqu’à un certain point sous une forme contextualisée. Lors de ce processus de formulation mathématique, les individus déterminent les mathématiques essentielles à utiliser pour analyser, configurer et résoudre le problème. Ils transposent dans le domaine des mathématiques un problème qui s’inscrit dans un contexte tiré du monde réel, et lui donnent une structure, une représentation et une spécificité d’ordre mathématique. Ils réfléchissent aux contraintes et aux hypothèses, en découvrent le sens et raisonnent à leur sujet. Plus précisément, le processus qui consiste à formuler des situations de façon mathématique englobe des activités telles que celles listées ci-après :

- Identifier les aspects mathématiques et les variables significatives d’un problème se situant dans un contexte tiré du monde réel.
- Reconnaître des structures mathématiques (des régularités, des relations, des récurrences, etc.) dans des problèmes ou des situations.
- Simplifier une situation ou un problème pour qu’il se prête à une analyse mathématique.
- Identifier les contraintes et les hypothèses qui sous-tendent toute modélisation mathématique et les simplifications extraites du contexte.
- Représenter la situation de façon mathématique à l’aide de variables, de symboles, de diagrammes et de modèles appropriés.
- Représenter le problème d’une autre façon, notamment l’organiser en fonction de concepts mathématiques et élaborer les hypothèses appropriées.
- Comprendre et expliquer les relations entre le langage spécifique au contexte employé pour décrire le problème et le langage symbolique et formel indispensable pour le représenter sous une forme mathématique.
- Traduire le problème en langage ou en représentation mathématique.
- Reconnaître les aspects du problème qui correspondent à des problèmes connus ou à des concepts, faits et procédures mathématiques.
- Utiliser la technologie (un tableur ou les fonctions d’une calculatrice graphique) pour décrire une relation mathématique inhérente dans un problème contextualisé.

Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques

Dans la définition de la culture mathématique, le verbe *employer* renvoie à la capacité des individus d’appliquer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques pour résoudre des problèmes énoncés de façon mathématique afin d’aboutir à des conclusions mathématiques. Au cours de ce processus qui consiste à employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques, les individus appliquent les procédures mathématiques requises pour dériver des résultats et trouver une solution mathématique (effectuer des opérations arithmétiques, résoudre des équations, faire des déductions logiques à partir d’hypothèses mathématiques, faire des manipulations symboliques, extraire des informations de tableaux et graphiques, représenter et manipuler des formes dans l’espace, et analyser des données).

Ils travaillent sur un modèle de la situation du problème, identifient des récurrences et des relations entre des entités mathématiques, et formulent des arguments mathématiques. Ce processus qui consiste à employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques englobe des activités telles que celles listées ci-après :

- Concevoir et appliquer des stratégies en vue de trouver des solutions mathématiques.
- Utiliser des outils mathématiques, dont des applications technologiques, pour faciliter la recherche d'une solution précise ou approximative.
- Appliquer des faits, des lois, des algorithmes et des structures mathématiques à la recherche de la solution.
- Manipuler des nombres, des informations et des données graphiques et statistiques, des équations et des expressions algébriques, ainsi que des représentations géométriques.
- Élaborer des structures, des diagrammes et des graphiques mathématiques, et en extraire des informations mathématiques.
- Utiliser différentes représentations et passer de l'une à l'autre durant le processus de résolution du problème.
- Faire des généralisations à partir des résultats de l'application de procédures mathématiques pour trouver des solutions.
- Réfléchir à des arguments mathématiques et expliquer et justifier des résultats mathématiques.

Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques

Dans la définition de la culture mathématique, le verbe *interpréter* renvoie à la capacité des individus de réfléchir à des solutions, des résultats ou des conclusions mathématiques, et de les interpréter dans le cadre de problèmes tirés du monde réel. Ce processus consiste à traduire des solutions mathématiques ou à replacer le raisonnement dans le contexte du problème, et à déterminer si les résultats sont plausibles et appropriés dans le contexte du problème. Ce processus mathématique est représenté par les flèches « Interpréter » et « Évaluer » dans le modèle de *culture mathématique* décrit à le graphique 4.1 ci-dessus. Les individus qui s'engagent dans ce processus peuvent être amenés à formuler et communiquer des explications et des arguments dans le contexte du problème, en réfléchissant au processus de modélisation et à ses résultats. Ce processus qui consiste à interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques englobe des activités telles que celles listées ci-après :

- Interpréter un résultat mathématique en fonction de la situation initiale du problème.
- Évaluer la plausibilité d'une solution mathématique dans le contexte d'un problème tiré du monde réel.
- Comprendre en quoi le monde réel a un impact sur les résultats et les calculs d'un modèle ou d'une procédure mathématique pour poser des jugements en contexte sur la façon d'appliquer ou d'ajuster les résultats.
- Expliquer pourquoi une conclusion ou un résultat mathématique est ou n'est pas plausible dans le contexte d'un problème.
- Comprendre la portée et les limites de concepts et de résultats mathématiques.
- Critiquer le modèle utilisé pour résoudre le problème et en identifier les limites.

Répartition souhaitée des items entre les processus mathématiques

L'objectif lors de la conception des épreuves est d'obtenir un équilibre par lequel la pondération est assez égale entre les deux processus qui consistent à établir un lien entre le monde réel et le monde des mathématiques, et le processus qui demande aux élèves de résoudre un problème énoncé sous une forme mathématique. Le tableau 4.1 montre la répartition souhaitée des items entre les processus.

Tableau 4.1 Répartition souhaitée des items de mathématiques entre les catégories de processus

Catégorie de processus	Pourcentage d'items
Formuler des situations de façon mathématique	25
Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques	50
Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques	25
Total	**100**

Facultés mathématiques fondamentales sous-tendant les processus mathématiques

Les dix années passées à concevoir des items PISA et à analyser la façon dont les élèves y répondent ont révélé l'existence d'une série de facultés mathématiques fondamentales qui sous-tendent concrètement chacun des processus mathématiques retenus et la culture mathématique. Dans le cadre de leurs travaux, Mogens Niss et ses collègues danois (Niss, 2003 ;

Niss et Jensen, 2002 ; Niss et Højgaard, 2011) ont identifié huit facultés – appelées « compétences » par Niss et également désignées de cette manière dans le cadre d'évaluation de la culture mathématique de l'enquête PISA 2003 (OCDE, 2004) – qui jouent un rôle primordial dans le comportement mathématique.

Le cadre de l'enquête PISA 2015 reprend cette série de facultés, mais les condense pour les limiter à sept sur la base d'une recherche sur leur utilisation lors de la résolution d'items déjà administrés (Turner et al., 2013). Ces facultés cognitives peuvent être apprises par les individus pour comprendre le monde et s'y impliquer d'une façon mathématique ou résoudre des problèmes. À mesure que le niveau de culture mathématique des individus augmente, ils peuvent faire appel de manière plus poussée à ces facultés mathématiques fondamentales (Turner et Adams, 2012). L'activation croissante des facultés mathématiques fondamentales est donc associée à la difficulté croissante des items. Cette observation est à la base de la description des différents niveaux de culture mathématique retenus lors des enquêtes PISA précédentes. Nous y reviendrons ci-après.

Les sept facultés mathématiques fondamentales retenues dans ce cadre d'évaluation sont les suivantes :

- ***Communication :*** La culture mathématique inclut la communication. Les individus perçoivent l'existence d'un défi, ce qui les stimule pour reconnaître et comprendre un problème contextualisé. Lire, décoder et interpréter des énoncés, des questions, des tâches ou des données permet aux individus de se construire un modèle mental de la situation, ce qui constitue une étape importante sur la voie de la compréhension, de la clarification et de la formulation d'un problème. Lors du processus de résolution, les individus peuvent avoir à résumer et présenter des résultats intermédiaires. Ensuite, lorsqu'ils ont trouvé une solution, ils peuvent avoir à présenter cette solution à d'autres, voire à l'expliquer ou à la justifier.
- ***Mathématisation :*** Les individus sont souvent amenés à transposer un problème défini en fonction du monde réel sous une forme strictement mathématique (en faisant appel à des processus de structuration, de conceptualisation, d'élaboration d'hypothèses et/ou de formulation de modèle) et à interpréter ou évaluer un résultat ou un modèle mathématique en fonction du problème initial. Le terme de mathématisation est employé pour décrire les activités fondamentales de ce type.
- ***Représentation :*** Les individus sont souvent amenés à se représenter des situations ou objets mathématiques, ce qui peut consister à sélectionner, interpréter et utiliser diverses représentations pour se faire une idée du problème, à passer d'une représentation à l'autre, à entrer en interaction avec le problème ou à présenter leur travail. Par représentations, on entend des graphiques, des tableaux, des diagrammes, des images, des équations, des formules et des matériaux concrets.
- ***Raisonnement et argumentation :*** Cette faculté implique des processus logiques approfondis et permet d'explorer et de relier des éléments du problème pour en dégager des inférences, vérifier une justification fournie, ou justifier une affirmation ou une solution.
- ***Conception de stratégies de résolution de problèmes :*** Les individus sont souvent amenés à concevoir des stratégies pour résoudre des problèmes de façon mathématique. Cela passe par une série de processus de contrôles critiques, qui guident les individus pour les aider à reconnaître, formuler et résoudre des problèmes. Cette compétence permet aux individus de sélectionner ou de concevoir une approche ou une stratégie permettant d'utiliser les mathématiques pour résoudre les problèmes qui se posent dans une tâche ou dans un contexte, ainsi que de guider sa mise en œuvre. Cette compétence mathématique peut intervenir à n'importe quel stade du processus de résolution de problèmes.
- ***Utilisation d'opérations et d'un langage symboliques, formels et techniques :*** Les individus qui exploitent leur culture mathématique doivent utiliser des opérations et un langage symboliques, formels et techniques, ce qui consiste à comprendre, interpréter, manipuler et employer des expressions symboliques (y compris des opérations et des expressions arithmétiques) dans un contexte mathématique régi par des conventions et des règles mathématiques. Cela implique aussi de comprendre et d'utiliser des *constructs* formels basés sur des définitions, des règles et des systèmes formels, et d'employer des algorithmes avec ces entités. Les symboles, les règles et les systèmes utilisés varient en fonction des contenus mathématiques spécifiques requis dans une tâche pour formuler ou résoudre le problème, ou en interpréter les aspects mathématiques.
- ***Utilisation d'outils mathématiques[1] :*** Par outils mathématiques, on entend les appareils tels que les instruments de mesure ainsi que les calculatrices et les outils informatiques qui se généralisent. Outre le fait que les élèves doivent savoir comment utiliser ces outils pour les aider dans la résolution des tâches mathématiques, ils doivent également en connaître les limites. Les outils mathématiques peuvent de fait jouer un rôle important lors de la communication des résultats.

Graphique 4.2 ■ **Relation entre les trois processus mathématiques (têtières du haut) et les sept facultés mathématiques fondamentales (têtières de gauche)**

	Formuler **des situations de façon mathématique**	***Employer*** **des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques**	***Interpréter*****, appliquer et évaluer des résultats mathématiques**
Communication	Lire, décoder et comprendre des questions, des tâches des objets ou des images pour élaborer un modèle mental de la situation	Articuler une solution, expliquer le cheminement vers la solution et/ou résumer et présenter des résultats mathématiques intermédiaires	Construire et communiquer des explications et des arguments au sujet du problème contextualisé
Mathématisation	Identifier les structures et les variables mathématiques dans le problème tel qu'il se pose dans le monde réel, et formuler des hypothèses pour pouvoir les utiliser	Se baser sur la compréhension du contexte pour orienter ou effectuer le processus de résolution mathématique, par exemple, travailler avec un degré de précision approprié au contexte	Comprendre la portée et les limites d'une solution mathématique qui découlent du modèle mathématique employé
Représentation	Créer une représentation mathématique des données du problème tel qu'il se pose dans le monde réel	Comprendre, relier et utiliser une série de représentations lors de l'interaction avec le problème	Interpréter des résultats mathématiques dans une série de formats en rapport avec une situation ou une utilisation ; comparer ou évaluer plusieurs représentations en fonction d'une situation
Raisonnement et argumentation	Expliquer, défendre ou justifier la représentation identifiée ou conçue de la situation du problème tel qu'il se pose dans le monde réel.	Expliquer, défendre ou justifier les procédures ou processus utilisés pour chercher une solution ou un résultat mathématique Établir un lien entre des fragments d'information pour parvenir à une solution mathématique, faire des généralisations ou créer une argumentation en plusieurs étapes	Réfléchir aux solutions mathématiques et fournir des explications et des arguments pour étayer, réfuter ou confirmer une solution mathématique à un problème tel qu'il se pose dans le monde réel
Conception de stratégies de résolution de problèmes	Choisir ou concevoir une approche ou une stratégie pour situer des problèmes contextualisés dans un cadre mathématique	Actionner des mécanismes efficaces de contrôle pendant une procédure en plusieurs étapes qui doit mener à une généralisation, une conclusion ou une solution mathématique	Concevoir et appliquer une stratégie pour interpréter, évaluer et valider une solution mathématique à un problème qui se pose dans le monde réel
Utilisation d'opérations et d'un langage symboliques, formels et techniques	Utiliser des modèles standards, des diagrammes, des symboles et des variables ad hoc pour énoncer dans un langage symbolique ou formel un problème tiré du monde réel	Comprendre et utiliser des *constructs* formels sur la base de définitions, de règles et de systèmes formels ; utiliser des algorithmes	Comprendre la relation entre le contexte du problème et la représentation de la solution mathématique. Se baser sur cette compréhension pour interpréter plus facilement la solution dans le contexte et évaluer la faisabilité et les limitations de la solution
Utilisation d'outils mathématiques	Utiliser des outils mathématiques pour identifier des structures mathématiques ou décrire des relations mathématiques	Connaître et savoir utiliser comme il se doit divers outils, pour faciliter la mise en œuvre de processus et de procédures à la recherche de solutions	Utiliser des outils mathématiques pour établir la plausibilité d'une solution mathématique et identifier d'éventuelles limites ou contraintes à propos de la solution, compte tenu du problème tel qu'il se présente dans le monde réel

Ces facultés interviennent à des degrés divers dans chacun des processus. La façon dont ces facultés se manifestent dans les trois processus est décrite dans le graphique 4.1.

L'analyse des aspects des facultés mathématiques fondamentales requis pour concevoir, puis appliquer une solution est un bon moyen de déterminer la difficulté empirique des items (Turner, 2012 ; Turner et Adams, 2012 ; Turner et al., 2013). Les items les plus faciles requièrent l'exploitation de quelques facultés à peine, d'une façon relativement directe. Les items les plus difficiles requièrent l'exploitation complexe de plusieurs facultés. Pour estimer a priori la difficulté des items, il faut tenir compte à la fois du nombre de facultés à mettre en œuvre et de la complexité de leur activation.

Contenus mathématiques

Acquérir des connaissances en mathématiques – et savoir les appliquer pour résoudre des problèmes qui se posent dans le monde réel – est important pour les citoyens dans les sociétés modernes. Il faut en effet pouvoir s'appuyer sur des connaissances mathématiques et sur une certaine compréhension des mathématiques pour résoudre des problèmes et interpréter des situations en rapport avec la vie personnelle et professionnelle, la société et la science.

Les structures mathématiques ont été développées au fil du temps pour comprendre et interpréter des phénomènes naturels et sociaux. À l'école, les programmes de mathématiques sont organisés autour d'un découpage logique des matières (l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, etc.) qui reflète les diverses branches, historiquement bien établies, des mathématiques et contribue à la définition d'une progression structurée. Or, en dehors des cours de mathématiques, les problèmes qui se posent ne s'accompagnent pas d'une série de règles et de principes montrant comment les surmonter. Il faut généralement une certaine créativité pour déterminer comment utiliser les mathématiques pour les résoudre et les formuler de façon mathématique. Il est fréquent que la même situation puisse s'aborder avec des concepts, procédures, faits ou outils mathématiques différents.

Comme l'enquête PISA a pour objet d'évaluer la culture mathématique, une structure des connaissances mathématiques est proposée sur la base des phénomènes mathématiques qui sous-tendent un large éventail de problèmes et qui ont motivé l'élaboration de concepts et procédures mathématiques spécifiques. Les programmes nationaux de cours de mathématiques étant conçus pour enseigner aux élèves des connaissances et des compétences en rapport avec ces mêmes phénomènes mathématiques, les contenus mathématiques qui ressortent de l'organisation du domaine d'évaluation sont très proches de la structure des programmes de cours. Le présent cadre identifie quelques thématiques appropriées pour évaluer la culture mathématique des élèves âgés de 15 ans, sur la base de l'analyse des normes nationales en vigueur en la matière dans 11 pays.

Pour organiser le domaine des mathématiques en vue d'évaluer la culture mathématique, il est important de choisir une structure conforme à l'évolution historique des mathématiques, qui soit suffisamment variée et approfondie pour révéler l'essence des mathématiques, et qui, de surcroît, représente – ou inclue – les branches conventionnelles des mathématiques d'une manière acceptable. C'est dans cet esprit que des catégories de contenus qui reflètent des phénomènes mathématiques ont été retenues dans le cadre d'évaluation de l'enquête PISA 2015. Ces catégories sont cohérentes avec celles utilisées lors des enquêtes PISA précédentes.

Les catégories de contenus suivantes ont donc été retenues en vue de l'enquête PISA 2015 dans le respect de l'évolution historique des mathématiques pour bien refléter le domaine des mathématiques et les phénomènes sous-jacents qui ont motivé leur développement, ainsi que les grandes branches des programmes de cours. Ces quatre catégories caractérisent les contenus mathématiques au cœur de la discipline et illustrent les contenus utilisés pour les items de l'enquête PISA 2015 :

- *variations et relations*
- *espace et formes*
- *quantité*
- *incertitude et données.*

Ces quatre catégories permettent d'organiser le domaine d'évaluation de sorte que les items se répartissent bien dans l'ensemble du domaine et se concentrent sur des phénomènes mathématiques importants, tout en évitant une division trop fine qui irait à l'encontre de la volonté de proposer des problèmes mathématiques riches et passionnants qui s'inspirent du monde réel. Cette classification par contenu est importante pour concevoir et choisir les items, ainsi que pour rendre compte des résultats, mais il faut souligner ici que certains contenus spécifiques peuvent se retrouver dans plus d'une catégorie. Les liens entre des aspects qui s'étendent sur les quatre catégories contribuent à la cohérence des mathématiques en tant que discipline et sont visibles dans certains items retenus pour constituer les épreuves de mathématiques de l'enquête PISA 2015.

 © OCDE 2018

Les catégories de contenus et les concepts spécifiquement adaptés aux élèves de 15 ans décrits ci-après permettent de cerner le niveau et la portée des contenus susceptibles d'être inclus dans l'enquête PISA 2015. En premier lieu, les catégories de contenus sont décrites de façon globale et leur pertinence pour résoudre des problèmes est expliquée. En second lieu, les types de contenus qu'il est approprié d'inclure dans une évaluation de la culture mathématique des élèves de 15 ans sont décrits de manière plus spécifique. Ces thématiques spécifiques reflètent des aspects communs qui se retrouvent dans les attentes d'un certain nombre de pays et de systèmes d'éducation. Les normes examinées pour identifier ces thématiques sont considérées non seulement comme des éléments qui montrent ce qui est enseigné en mathématiques dans ces pays, mais également comme des indicateurs des connaissances et compétences que ces pays jugent important d'enseigner aux élèves de cet âge pour les préparer à devenir des citoyens constructifs, engagés et réfléchis.

Les catégories de contenus mathématiques – *variations et relations* ; *espace et formes* ; *quantité ;* et *incertitude et données* – sont décrites ci-après.

Variations et relations

Le monde naturel et le monde façonné par l'homme affichent une multitude de relations provisoires et permanentes entre les objets et les circonstances, dans lesquelles des changements interviennent dans des systèmes d'objets interdépendants ou dans des circonstances où les éléments s'influencent les uns les autres. Dans de nombreux cas, ces changements se produisent avec le temps. Il arrive aussi que des changements qui affectent un objet ou une quantité soient en rapport avec des changements qui ont eu lieu sur un autre objet ou quantité. Il s'agit de changements tantôt ponctuels, tantôt continus. Certaines relations sont de nature permanente. Pour mieux comprendre les variations et les relations, il faut tout d'abord comprendre les types fondamentaux de changement et les reconnaître lorsqu'ils se produisent. Il s'agit là d'une étape essentielle pour utiliser des modèles mathématiques adaptés qui permettent de décrire et de prévoir les changements. En termes mathématiques, cela revient à modéliser les variations et les relations grâce à des fonctions et équations appropriées, ainsi qu'à créer, interpréter et traduire des représentations graphiques et symboliques des relations.

Les *variations* et les *relations* s'observent dans des contextes très divers : la croissance des organismes, la musique, le cycle des saisons, les tendances météorologiques, le taux d'emploi et la conjoncture économique, par exemple. Certains aspects mathématiques traditionnels des fonctions et de l'algèbre, notamment les expressions algébriques, les équations et les inégalités, ou les représentations sous forme de graphiques et de tableaux, sont essentiels pour décrire, modéliser et interpréter les phénomènes de variation. Les représentations statistiques de données et de relations sont souvent utilisées pour décrire et interpréter des variations et des relations. Une bonne maîtrise des nombres et des unités est également essentielle pour définir et interpréter des *variations* et des *relations*. Quelques relations intéressantes se dégagent de la prise de mesures géométriques, par exemple le fait que des changements de périmètre dans une famille de formes peuvent se traduire par des changements de superficie, ou encore les relations entre les longueurs des côtés de triangles.

Espace et formes

La catégorie de contenus *espace et formes* englobe un large éventail de phénomènes omniprésents dans notre environnement visuel et physique : les régularités, les propriétés des objets, les positions et les orientations, les représentations d'objets, l'encodage et le décodage d'informations visuelles, la navigation et les interactions dynamiques avec des formes réelles ainsi qu'avec leur représentation. La géométrie est un fondement essentiel de la catégorie *espace et formes*, qui s'étend toutefois au-delà des limites de cette branche en termes de contenu, de signification et de méthode, et intègre d'autres branches des mathématiques, telles que la visualisation dans l'espace, les mesures et l'algèbre. Ainsi, des formes peuvent se déformer et un point peut se déplacer dans l'espace, ce qui fait intervenir des concepts de fonction. Les formules de mesure sont centrales. La manipulation et l'interprétation de formes contextualisées qui passent par l'utilisation d'outils tels que des logiciels de géométrie dynamique ou de géolocalisation sont incluses dans cette catégorie de contenus.

L'enquête PISA part du principe que la maîtrise d'une série de compétences et de concepts fondamentaux est essentielle pour démontrer sa culture mathématique dans la catégorie *espace et formes*, ce qui implique un large éventail d'activités, notamment comprendre la notion de perspective (dans des peintures, par exemple), créer et lire des cartes, transformer des formes avec ou sans aide technologique, interpréter des vues de scènes en trois dimensions sous diverses perspectives et construire des représentations de formes.

Quantité

La notion de *quantité* est peut-être l'aspect mathématique le plus répandu et le plus essentiel de l'engagement et du fonctionnement dans notre monde. Elle englobe la quantification d'attributs d'objets, de relations, de situations et d'entités dans le monde, la compréhension de diverses représentations de ces quantifications et l'évaluation d'interprétations et d'arguments fondés sur la quantité. Pour appréhender la quantification, il faut comprendre le mesurage, le comptage, la magnitude, les unités, les indicateurs, la taille relative, les tendances numériques et les régularités. Certains aspects du raisonnement quantitatif – le sens des nombres, les représentations multiples des nombres, l'élégance des calculs, le calcul mental, les estimations et l'évaluation de la plausibilité des résultats – sont l'essence même de la culture mathématique dans la catégorie *quantité*.

La quantification est la principale méthode qui existe pour décrire et mesurer un grand nombre des attributs d'objets dans le mode. Elle permet de modéliser des situations, d'examiner les variations et les relations, de décrire et de manipuler l'espace et les formes, d'organiser et d'interpréter les données, et de mesurer et d'évaluer l'incertitude. Dans la catégorie *quantité*, la culture mathématique consiste à utiliser des connaissances relatives aux nombres et aux opérations avec des nombres dans un large éventail de contexte.

Incertitude et données

En sciences, dans le domaine technologique et dans la vie de tous les jours, l'incertitude existe de fait. Le phénomène de l'incertitude est donc au cœur de l'analyse mathématique de nombreux problèmes, et la théorie de la probabilité et la statistique, ainsi que les techniques de représentation et de description des données, ont été créées pour y répondre. Dans la catégorie de contenu *incertitude et données*, il s'agit de reconnaître la place de la variation dans les processus, de comprendre l'ampleur de cette variation, d'admettre la notion d'incertitude et d'erreur dans les mesures, et de connaître le concept de chance. Il faut également formuler, interpréter et évaluer des conclusions dans des situations où règne l'incertitude. La présentation et l'interprétation des données sont essentielles dans cette catégorie (Moore, 1997).

L'incertitude entoure les prévisions scientifiques, les résultats de scrutins électoraux, les prévisions météorologiques et les modèles économiques. Les notes à un examen, les résultats de sondages et les processus de fabrication varient, et la chance est fondamentale dans de nombreuses activités récréatives auxquelles les individus se livrent pendant leurs loisirs. Les branches traditionnelles de la probabilité et de la statistique sont des moyens formels de décrire, modéliser et interpréter une certaine catégorie de phénomènes, et de dégager des inférences. Par ailleurs, la connaissance des nombres et de certains aspects de l'algèbre comme les graphiques et les représentations symboliques facilite la tâche aux individus qui s'attaquent à des problèmes relevant de cette catégorie. La présentation et l'interprétation des données constituent un aspect important de la catégorie *incertitude et données*.

Répartition souhaitée des items entre les catégories de contenus

Les items d'ancrage retenus pour l'enquête PISA 2015 se répartissent entre les quatre catégories de contenus mathématiques comme le montre le tableau 4.2. Lors de la conception des épreuves, l'objectif est d'obtenir une répartition équilibrée des items entre les contenus mathématiques, car tous ces domaines sont importants pour des citoyens constructifs, engagés et réfléchis.

Tableau 4.2 Répartition souhaitée des items de mathématiques entre les catégories de contenus

Catégorie de contenus	Pourcentage d'items
Variations et relations	25
Espace et formes	25
Quantité	25
Incertitude et données	25
Total	**100**

Thématiques retenues pour orienter l'évaluation de la culture mathématique

Pour bien comprendre, puis résoudre des problèmes contextualisés en rapport avec les catégories *variations et relations*, *espace et formes, quantité* et *incertitude et données*, il faut pouvoir se baser sur une série de concepts, procédures, faits et outils mathématiques, et ce avec un certain niveau de maîtrise et de sophistication. L'épreuve PISA de culture mathématique cherche à évaluer des niveaux et des contenus mathématiques appropriés aux élèves de 15 ans pendant leur cheminement vers une citoyenneté constructive, engagée et réfléchie, qui leur permet de poser des jugements et de

prendre des décisions en toute connaissance de cause. L'enquête PISA, qui n'est pas conçue pour évaluer des matières précises du programme scolaire, tente toutefois de refléter les connaissances et compétences que les élèves ont eu la possibilité d'acquérir jusqu'à l'âge de 15 ans.

Les contenus présents dans l'enquête PISA 2015 sont identiques à ceux mis au point en 2012. Les quatre catégories de contenu *variations et relations*, *espace et formes*, *quantité,* et *incertitude et données* ont servi de base à l'identification des différents contenus, même s'il n'y a pas de mise en correspondance précise entre des thématiques et ces catégories. Les contenus décrits ci-dessous montrent que bon nombre de ces concepts sont au cœur des quatre catégories et confirment la cohérence des mathématiques en tant que discipline. Il s'agit plus d'exemples de contenus inclus dans l'épreuve de mathématiques de l'enquête PISA 2015 que d'une liste exhaustive :

- ***Fonctions :*** le concept de fonction, notamment les fonctions linéaires, leurs propriétés et une série de descriptions et de représentations. Les représentations verbales, symboliques et graphiques, ainsi que les représentations sous forme de tableaux, sont souvent utilisées.
- ***Expressions algébriques :*** l'interprétation verbale et la manipulation d'expressions algébriques, comprenant des nombres, des symboles, des opérations arithmétiques, des puissances et des racines simples.
- ***Équations et inéquations :*** des équations et inéquations linéaires, des équations simples du second degré, et des méthodes analytiques et non analytiques de résolution.
- ***Systèmes de coordonnées :*** la représentation et la description de données, de positions et de relations.
- ***Relations dans et entre des objets géométriques en deux et en trois dimensions :*** des relations statiques telles que des liens algébriques entre des éléments de figures (par exemple, le théorème de Pythagore, qui définit la relation entre la longueur des côtés d'un triangle rectangle), les positions relatives, la similitude et la congruence, et les relations dynamiques impliquant la transformation et le mouvement d'objets, ainsi que les correspondances entre objets en deux et en trois dimensions.
- ***Mesure :*** la quantification de formes et d'objets, et de certains de leurs aspects, par exemple l'angle, la distance, la longueur, le périmètre, la circonférence, la superficie et le volume.
- ***Nombres et unités :*** les concepts, les représentations de nombres et les systèmes de numération, dont les propriétés de nombres entiers et rationnels, des aspects pertinents des nombres irrationnels, ainsi que des quantités et des unités en rapport avec des phénomènes tels que le temps, l'argent, le poids, la température, la distance, la superficie et le volume, ainsi que des quantités dérivées et leur description numérique.
- ***Opérations arithmétiques :*** la nature et les propriétés des opérations numériques et les conventions d'écriture qui s'y rapportent.
- ***Pourcentages, ratios et proportions :*** la description numérique de grandeur relative et le raisonnement fondé sur les proportions pour résoudre des problèmes.
- ***Principes de comptage :*** les permutations et les combinaisons simples.
- ***Estimation :*** l'approximation dans un but particulier de quantités et expressions numériques, notamment les chiffres significatifs et les arrondis.
- ***Collecte, représentation et interprétation de données :*** la nature, l'origine et la collecte de divers types de données, et les différents modes de représentation et d'interprétation des données.
- ***Variabilité des données et description du phénomène de variabilité :*** les concepts tels que la variabilité, la distribution et les tendances principales dans des groupes de données, les modes de description et d'interprétation de ces concepts en termes quantitatifs.
- ***Échantillonnage et échantillons :*** les concepts d'échantillonnage dans des groupes de données, notamment la formulation d'inférences simples sur la base des propriétés des échantillons.
- ***Risque et probabilité :*** les concepts tels que les événements aléatoires, la variation aléatoire et sa représentation, le risque et la fréquence des événements, et les aspects fondamentaux du concept de probabilité.

Contextes

Le choix de représentations et de stratégies mathématiques appropriées dépend souvent du contexte dans lequel les problèmes de mathématiques se posent. De l'avis général, situer les problèmes dans un contexte permet d'accroître la difficulté des items (voir les conclusions en rapport avec la statistique de Watson et Callingham, 2003). La grande diversité des contextes utilisés est un aspect important de l'enquête PISA, car elle permet de potentiellement mettre en correspondance les centres d'intérêt des individus et les situations dans lesquelles les individus fonctionnent au XXI^{e} siècle.

Le cadre d'évaluation de la culture mathématique de l'enquête PISA 2015 définit quatre catégories de contextes qui sont utilisées pour répartir les items constituant les épreuves PISA :

- ***Personnel :*** les problèmes classés dans cette catégorie portent sur les activités des individus, de leur famille et de leurs pairs. Parmi les contextes à considérer comme personnels, citons notamment la préparation des repas, les achats, les jeux, la santé individuelle, les moyens de transport, le sport, les voyages, l'emploi du temps et le budget personnel.
- ***Professionnel :*** les problèmes classés dans la catégorie des contextes professionnels se situent dans le monde du travail. Parmi les contextes à considérer comme professionnels, citons notamment ceux en rapport avec le mesurage, les devis et les commandes de matériaux de construction, la comptabilité et la gestion des salaires, le contrôle de la qualité, les inventaires et les prévisions, le design et l'architecture, et la prise de décisions dans le cadre professionnel. Les contextes professionnels peuvent concerner toutes les classes de main-d'œuvre, des travailleurs non qualifiés à ceux qui exercent les plus hautes fonctions, même si les items PISA doivent être accessibles à des élèves de 15 ans.
- ***Sociétal :*** les problèmes classés dans la catégorie des contextes sociétaux se situent dans la communauté (locale, nationale ou mondiale). Parmi les contextes à considérer comme sociétaux, citons notamment ceux en rapport avec les systèmes électoraux, les transports publics, les gouvernements, les politiques publiques, la démographie, la publicité, les statistiques nationales et l'économie. Les individus sont impliqués dans tous ces contextes à titre personnel, mais les problèmes relevant de cette catégorie se présentent avant tout sous l'angle de la collectivité.
- ***Scientifique :*** les problèmes classés dans la catégorie des contextes scientifiques traitent de l'application des mathématiques dans le monde naturel ainsi que dans des thématiques en rapport avec la science et la technologie. Parmi les contextes à considérer comme scientifiques, citons notamment les contextes en rapport avec la météorologie ou le climat, l'écologie, la médecine, l'espace, la génétique, le mesurage et les mathématiques. Les items intramathématiques, soit ceux dont tous les éléments ont trait au monde des mathématiques, se classent dans la catégorie des contextes scientifiques.

Les items PISA qui partagent le même stimulus sont regroupés par unité. Il est dès lors courant que tous les items d'une même unité se classent dans la même catégorie de contextes. Il y a toutefois quelques exceptions : il se peut, par exemple, que le stimulus d'une unité soit analysé sous l'angle individuel dans un item, mais sous l'angle sociétal dans un autre item. Si un item inclut uniquement des *constructs* mathématiques sans la moindre référence aux éléments contextuels de l'unité dont il relève, il se classe dans la catégorie de contextes à laquelle l'unité appartient. Dans les rares cas où une unité inclut uniquement des *constructs* mathématiques sans la moindre référence à un contexte sans rapport avec les mathématiques, cette unité se classe dans la catégorie des contextes scientifiques.

L'utilisation de ces catégories de contextes permet de constituer une gamme de contextes d'item et de garantir que les épreuves reflètent un large éventail d'applications des mathématiques, des applications dans la vie courante à celles requises pour résoudre des problèmes mondiaux. De plus, il est important que chaque catégorie de contextes comprenne des items dont le degré de difficulté varie. Comme ces catégories ont été définies pour soumettre aux élèves des problèmes dans des contextes très différents, chaque catégorie doit largement contribuer à l'évaluation de la culture mathématique. Il faut éviter que le degré de difficulté des items d'une catégorie soit systématiquement plus ou moins élevé que celui des items d'une autre catégorie.

Lors de l'identification des contextes pouvant se révéler pertinents, il est essentiel de garder présent à l'esprit que les épreuves ont pour but d'évaluer dans quelle mesure les élèves sont capables d'utiliser les contenus, processus et facultés mathématiques qu'ils ont acquis jusqu'à l'âge de 15 ans. C'est la raison pour laquelle les contextes des items sont choisis pour leur pertinence par rapport aux centres d'intérêt et à la vie des élèves, et en fonction des défis qu'ils auront à relever dès qu'ils commenceront à avoir un rôle social en tant que citoyens constructifs, engagés et réfléchis. Les directeurs nationaux de projet des pays participant à l'enquête PISA contribuent à l'évaluation de ce degré de pertinence.

Répartition souhaitée des items entre les catégories de contextes

Les items d'ancrage retenus pour constituer les épreuves de mathématiques de l'enquête PISA 2015 se répartissent entre ces catégories de contextes, comme le montre le tableau 4.3. Cette répartition équilibrée permet de faire en sorte qu'aucun type de contexte ne prédomine : les élèves se voient donc présenter des items dans un large éventail de contextes correspondant à un grand nombre de centres d'intérêt personnels et à un grand nombre de situations que les individus sont susceptibles de rencontrer dans la vie.

Tableau 4.3 Répartition souhaitée des items de mathématiques entre les catégories de contextes

Catégorie de contextes	Pourcentage d'items
Contextes personnels	25
Contextes professionnels	25
Contextes sociétaux	25
Contextes scientifiques	25
Total	**100**

ÉVALUER LA CULTURE MATHÉMATIQUE

Cette section présente l'approche utilisée pour mettre en œuvre dans le cadre de l'enquête PISA 2015 les éléments conceptuels décrits précédemment : la structure des composantes mathématiques, la procédure employée pour transposer les items papier-crayon vers des items informatisés, et les différents niveaux de compétences.

Structure des instruments d'évaluation

En 2012, la culture mathématique était le domaine majeur de l'évaluation et les épreuves papier-crayon étaient constituées à partir d'une batterie d'items de 270 minutes. Cette batterie était divisée en neuf blocs d'items, de 30 minutes de test chacun. Les blocs d'items étaient répartis par rotation entre des carnets de test et comprenaient aussi des items d'ancrage.

La culture mathématique est un domaine mineur d'évaluation en 2015 et les élèves doivent donc répondre à un nombre moins élevé d'items. Les blocs d'items sont néanmoins conçus et attribués de la même manière. Six blocs de mathématiques provenant des enquêtes précédentes, parmi lesquels un bloc « facile » et un bloc « difficile », sont utilisés dans un des trois modèles de rotation, selon que les pays participent ou non à l'épreuve facultative de résolution collaborative de problèmes, et qu'ils administrent ou non les épreuves sur papier. L'utilisation de six blocs d'items plutôt que de trois comme c'était le cas dans le passé pour les domaines mineurs d'évaluation entraîne le recours à un nombre plus élevé d'items d'ancrage et donc une couverture plus large des *constructs*. Le nombre d'élèves répondant à chaque question est néanmoins inférieur. Cette conception de l'enquête vise à réduire les biais potentiels tout en stabilisant et en améliorant la mesure des tendances. L'essai de terrain a été mis à profit pour réaliser une analyse des effets du mode d'administration des items et pour établir une équivalence entre les formats de présentation (informatisée et papier-crayon).

Formats de réponse

Trois types de format de réponse sont utilisés dans l'épreuve de culture mathématique conçue pour l'enquête PISA 2015 : des items à réponse construite ouverte, des items à réponse construite fermée et des items à choix multiple (simple ou complexe). Dans les items à réponse construite ouverte, les élèves doivent fournir une réponse écrite un tant soit peu élaborée, et doivent parfois aussi expliquer le cheminement vers leur réponse ou montrer les étapes qu'ils ont enchaînées pour y aboutir. Ces items sont donc corrigés manuellement par des correcteurs spécialement formés à cet effet.

Les items à réponse construite fermée offrent aux élèves un cadre plus structuré pour présenter leur réponse, qui peut dès lors être jugée plus facilement comme correcte ou incorrecte. Souvent, les réponses des élèves à ces items peuvent être saisies dans une base de données, puis codées automatiquement, mais il arrive que des correcteurs spécialement formés doivent intervenir. Les réponses construites fermées se résument la plupart du temps à un chiffre.

Dans les items à choix multiple, les élèves doivent choisir une ou plusieurs options de réponse. Leurs réponses peuvent généralement être codées automatiquement.

Les trois formats de réponse sont représentés en proportions similaires dans les épreuves.

Codage des items

La majorité des items sont corrigés de façon dichotomique (les réponses valent ou non un crédit). Certains des items à réponse construite ouverte peuvent valoir un crédit partiel, en fonction de la mesure dans laquelle les réponses sont correctes. Des consignes détaillées de correction (crédit complet, crédit partiel et pas de crédit) sont fournies aux correcteurs formés pour coder les réponses à ces items, ce qui permet de garantir que le codage des items est effectué d'une façon uniforme et fiable dans tous les pays participants. Il faut garantir un degré maximum de comparabilité entre les évaluations informatisées et sur papier. Une attention particulière est donc accordée aux guides de codage afin de garantir qu'ils incluent toutes les informations importantes.

Épreuve informatisée de mathématiques

Les épreuves papier-crayon étaient le principal mode d'administration utilisé dans l'enquête PISA 2012. En passant aux épreuves informatisées en 2015, la prudence doit être de mise afin de maximiser la comparabilité entre les deux enquêtes. La section qui suit analyse certains éléments propres aux évaluations informatisées. Même si ces éléments offrent les possibilités qui sont exposées ci-dessous, l'enquête PISA 2015 comprend uniquement des items provenant de l'évaluation papier-crayon administrée en 2012 afin de garantir la comparabilité. Les éléments décrits ici seront toutefois utilisés dans le cadre des futures enquêtes PISA, pour autant que leur introduction ne compromette pas la comparabilité avec les évaluations précédentes.

Dans le milieu professionnel, les tâches mathématiques font de plus en plus appel à la technologie, de sorte que la culture mathématique et l'usage de l'informatique se combinent (Hoyles et al., 2002). Tous les travailleurs, quelle que soit leur place dans la hiérarchie, font face à l'interdépendance de la culture mathématique et de l'usage de l'informatique. La résolution des items PISA sur ordinateur plutôt que sur papier fait entrer l'enquête PISA dans la réalité du XXI^{e} siècle et des exigences qui y sont liées.

De nombreux travaux de recherche se sont intéressés à la performance des répondants en fonction du mode d'administration des épreuves (papier-crayon ou informatisé), mais leurs conclusions sont parfois contradictoires. Certaines études donnent à penser qu'un environnement informatisé peut avoir une influence sur la performance des élèves. Selon Richardson et al. (2002), les élèves apprécient la nature engageante et motivante des tâches informatisées de résolution de problèmes, souvent malgré la nouveauté du type de problèmes et la nature exigeante des items. Ils se laissent parfois distraire par la présentation attrayante des graphiques et utilisent à d'autres reprises une mauvaise heuristique lorsqu'ils tentent de résoudre une tâche.

Dans le cadre de l'une des plus vastes études comparatives entre les évaluations sur papier et les évaluations informatisées, Sandene et al. (2008) ont établi que le score des élèves de 8^{e} année à une évaluation de mathématiques était supérieur de 4 points lorsque l'évaluation était administrée sous forme informatisée par rapport à la version sur papier. Bennett et al. (2008) ont conclu grâce à leur étude que la familiarité avec l'informatique influence la performance lors d'évaluations informatisées en mathématiques, alors que d'autres chercheurs ont découvert que la gamme de fonctions disponibles dans les tests informatisés peut avoir un impact sur la performance. À titre d'exemple, Mason (2001) a établi que la performance des élèves était négativement affectée dans les évaluations informatisées quand ceux-ci ne pouvaient pas relire et vérifier leurs réponses dans la version informatisée. Bennett (2003) a constaté que la taille de l'écran avait une influence sur les résultats lors de tests de raisonnement verbal, vraisemblablement parce qu'il est nécessaire d'utiliser la barre de défilement sur des écrans plus petits.

Par contraste, Wang et al. (2008) ont mené une méta-analyse d'études portant sur les résultats en mathématiques d'élèves de l'enseignement primaire et de l'enseignement secondaire. D'après cette méta-analyse, le mode d'administration n'a pas d'effet statistiquement significatif sur les résultats. De plus, des études récentes sur le mode d'administration, menées dans le cadre du Programme de l'OCDE pour l'évaluation internationale des compétences des adultes (PIAAC), donnent à penser que les résultats peuvent être traités sur un pied d'égalité (OCDE, 2014). Cette étude a assigné de façon aléatoire à des adultes une version papier-crayon ou une version informatisée de l'évaluation des compétences en littératie et en numératie. La majorité des épreuves papier-crayon a été adaptée au mode d'administration informatisé et utilisée lors de cette étude. Les analyses des données de l'étude ont révélé que la quasi-totalité des paramètres des items est restée stable, quel que soit le mode d'administration employé, démontrant ainsi que les réponses pouvaient être mesurées en utilisant la même échelle de compétences en littératie et en numératie. Au vu de ces résultats, l'hypothèse retenue est que les items de mathématiques utilisés dans l'enquête PISA 2012 peuvent être transposés sur écran sans affecter les données tendancielles. (Lors de l'essai de terrain de l'enquête PISA 2015, l'effet du changement de mode d'administration sur la performance des élèves a été analysé. Pour plus de détails, voir l'encadré 1.2.)

Des compétences de base en informatique sont nécessaires pour répondre à une épreuve informatisée, au même titre d'ailleurs que des compétences de base en gestion de l'écrit sont requises pour répondre à une épreuve papier-crayon. Parmi ces compétences en informatique, citons la capacité d'utiliser du matériel de base (la souris, le clavier, etc.) et la connaissance de conventions élémentaires (les flèches pour se déplacer et les boutons pour exécuter des commandes, par exemple). L'intention est de limiter autant que faire se peut la nécessité d'utiliser ces compétences dans l'épreuve informatisée.

Présentation des niveaux de compétences en mathématiques

Les résultats aux épreuves PISA de mathématiques sont présentés de différentes façons. Le niveau global de culture mathématique est estimé sur une échelle de compétences à partir des échantillons d'élèves dans chaque pays.

Le degré de culture mathématique associé à chaque niveau de l'échelle de compétences est décrit. Lors de l'enquête PISA 2003, les quatre grandes catégories de contenu ont été retenues pour construire les échelles de compétences. La figure 4.3 décrit les six niveaux de compétences de l'échelle globale de compétences en mathématiques utilisée pour rendre compte des résultats aux épreuves PISA en 2012. Ces niveaux sont à la base de l'échelle PISA de compétences en mathématiques de l'enquête PISA 2015. L'échelle de 2012 est utilisée pour rendre compte des résultats de l'enquête PISA 2015. La culture mathématique étant un domaine mineur d'évaluation en 2015, le niveau de compétences est rapporté sur une seule échelle globale.

Les facultés mathématiques fondamentales jouent un rôle central dans la définition des différents niveaux de l'échelle globale de culture mathématique et des sous-échelles de processus. Par exemple, dans la description du niveau 4 (voir la figure 4.3), la deuxième phrase souligne des aspects de la mathématisation et de la représentation qui sont évidents à ce niveau de compétences, et la dernière phrase met l'accent sur les facultés de communication, de raisonnement et d'argumentation caractéristiques de ce niveau, les comparant à celles inférieures et supérieures respectivement associées au niveau 3 et au niveau 5. Les processus mathématiques ont été décrits dans une section précédente et dans la figure 4.2 en fonction des facultés mathématiques fondamentales qu'ils font intervenir.

Graphique 4.3 ▪ **Description succincte des six niveaux de compétences en mathématiques dans l'enquête PISA 2015**

Niveau	Caractéristiques des tâches
6	Au niveau 6, les élèves sont capables de conceptualiser, de généraliser et d'utiliser des informations sur la base de leurs propres recherches et de la modélisation de problèmes complexes. Ils peuvent utiliser leurs connaissances dans des contextes non standards. Ils peuvent établir des liens entre différentes représentations et sources d'information, et passer de l'une à l'autre sans difficulté. Ils peuvent se livrer à des raisonnements et à des réflexions mathématiques difficiles. Ils peuvent s'appuyer sur leur compréhension approfondie et leur maîtrise des relations symboliques et des opérations mathématiques classiques pour élaborer de nouvelles approches et de nouvelles stratégies à appliquer lorsqu'ils sont face à des situations qu'ils n'ont jamais rencontrées. Ils peuvent décrire clairement et communiquer avec précision leurs actes et les fruits de leur réflexion – résultats, interprétations, arguments – qui sont en adéquation avec les situations initiales.
5	Au niveau 5, les élèves peuvent élaborer et utiliser des modèles dans des situations complexes pour identifier des contraintes et construire des hypothèses. Ils sont capables de choisir, de comparer et d'évaluer des stratégies de résolution de problèmes leur permettant de s'attaquer à des problèmes complexes en rapport avec ces modèles. Ils peuvent aborder les situations sous un angle stratégique en mettant en œuvre un grand éventail de compétences pointues de raisonnement et de réflexion, en utilisant les caractérisations symboliques et formelles et les représentations y afférentes, et en s'appuyant sur leur compréhension approfondie de ces situations. Ils commencent à réfléchir à leurs actes et peuvent formuler et communiquer leurs interprétations et leur raisonnement.
4	Au niveau 4, les élèves sont capables d'utiliser des modèles explicites pour faire face à des situations concrètes complexes qui peuvent leur demander de tenir compte de contraintes ou de construire des hypothèses. Ils peuvent choisir et intégrer différentes représentations, dont des représentations symboliques, et les relier directement à certains aspects de situations tirées du monde réel. Les élèves à ce niveau peuvent mettre en œuvre certaines compétences et raisonner avec une certaine souplesse en s'appuyant sur leur compréhension de ces contextes. Ils peuvent formuler des explications et des arguments sur la base de leurs interprétations et de leurs actions, et les communiquer.
3	Au niveau 3, les élèves peuvent appliquer des procédures bien définies, dont celles qui leur demandent des décisions séquentielles. Leurs interprétations sont correctes et leur permettent de choisir et mettre en œuvre des stratégies simples de résolution de problèmes. Ils peuvent interpréter et utiliser des représentations basées sur différentes sources d'information, et construire leur raisonnement directement sur cette base. Ils sont capables d'utiliser les pourcentages, les fractions et les nombres décimaux, et d'établir des relations proportionnelles. Les solutions indiquent qu'ils peuvent rendre compte succinctement de leurs interprétations et de leur raisonnement.
2	Au niveau 2, les élèves peuvent interpréter et reconnaître des situations dans des contextes qui leur demandent tout au plus d'établir des inférences directes. Ils ne peuvent puiser des informations pertinentes que dans une seule source d'information et n'utiliser qu'un seul mode de représentation. Ils sont capables d'utiliser des algorithmes, des formules, des procédures ou des conventions élémentaires pour résoudre des problèmes avec des nombres entiers. Ils peuvent interpréter les résultats de manière littérale.
1	Au niveau 1, les élèves peuvent répondre à des questions s'inscrivant dans des contextes familiers, dont la résolution ne demande pas d'autres informations que celles présentes et qui sont énoncées de manière explicite. Ils sont capables d'identifier les informations et d'appliquer des procédures de routine sur la base de consignes directes dans des situations explicites. Ils peuvent exécuter des actions qui vont de soi et qui découlent directement du stimulus donné.

Note

1. Dans certains pays, les « outils mathématiques » peuvent aussi désigner des procédures mathématiques établies, telles que les algorithmes. Dans le cadre PISA, les « outils mathématiques » désignent uniquement les appareils décrits dans cette section.

Références

Bennett, R.E. (2003), *Online Assessment and the Comparability of Score Meaning*, Research Memorandum, Educational Testing Service, Princeton, NJ.

Bennett, R.E. et al. (2008), « Does it matter if i take my mathematics test on computer? A second empirical study of mode effects in NAEP », *Journal of Technology, Learning, and Assessment*, vol. 6/9.

Hoyles, C. et al. (2002), *Mathematical Skills in the Workplace: Final Report to the Science Technology and Mathematics Council*, Institute of Education, University of London, Londres, http://eprints.ioe.ac.uk/1565/.

Mason, B., M. Patry et **D. Berstein** (2001), « An examination of the equivalence between non-adaptive computer based and traditional testing », *Journal of Education Computing Research*, vol. 1/24, pp. 29-39.

Moore, D. (1997), « New pedagogy and new content: The case of statistics », *International Statistical Review*, vol. 2/65, pp. 123-137.

Niss, M. (2003), « Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KoM Project », in A. Gagatsis et S. Papastavridis (éd.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, Hellenic Mathematical Society, Athènes, pp. 116-124.

Niss, M., W. Blum et **P. Galbraith** (2007), « Introduction », in W. Blum, P.L. Galbraith, H.W. Henn et M. Niss (éd.), *Modelling and Applications in Mathematics Education (The 14th ICMI Study)*, Springer, New York, pp. 3-32.

Niss, M. et **T.H. Jensen** (2002), « Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark, uddannelsesstyrelsens temahæfteserie », n° 18, Ministère danois de l'Éducation, Copenhague, http://pub.uvm.dk/2002/kom/.

Niss, M. et **T. Højgaard** (éd.) (2011), « Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark », Ministère danois de l'Éducation, rapport n° 485, Roskilde University, Roskilde, https://pure.au.dk/portal/files/41669781/thj11_mn_kom_in_english.pdf.

OCDE (2014), *Technical Report of the Survey of Adult Skills (PIAAC)*, pré-publication, OCDE, Paris, www.oecd.org/site/piaac/_Technical%20Report_17OCT13.pdf.

OCDE (2013), *Cadre d'évaluation et d'analyse du cycle PISA 2012 : Compétences en mathématiques, en compréhension de l'écrit, en sciences, en résolution de problèmes et en matières financières*, PISA, Éditions OCDE, Paris, http://dx.doi.org/10.1787/9789264190559-fr.

OCDE (2010), *Pathways to Success: How Knowledge and Skills at Age 15 Shape Future Lives in Canada*, PISA, Éditions OCDE, Paris, http://dx.doi.org/10.1787/9789264081925-en.

OCDE (2004), *Cadre d'évaluation de PISA 2003 : Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*, PISA, Éditions OCDE, Paris, http://dx.doi.org/10.1787/9789264019010-fr.

Richardson, M. et al. (2002), « Challenging minds? Students' perceptions of computer-based world class tests of problem solving », *Computers in Human Behavior*, vol. 18/6, pp. 633-649.

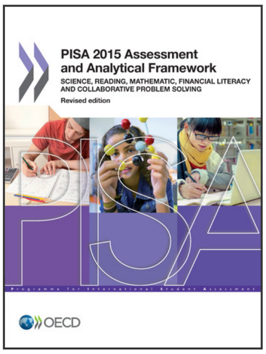
Sandene, B. et al. (2005), *Online Assessment in Mathematics and Writing: Reports from the NAEP Technology-Based Assessment Project*, Research and Development Series (NCES 2005-457), US Department of Education, National Center for Education Statistics, US Government Printing Office, Washington, DC.

Turner, R. et **R.J. Adams** (2012), « Some drivers of test item difficulty in mathematics: An analysis of the competency rubric », communication présentée à l'occasion de la réunion annuelle de l'American Educational Research Association (AERA), 13-17 avril, Vancouver, http://research.acer.edu.au/pisa/7/.

Turner, R. et al. (2013), « Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA », in M. Prenzel et al. (éd.), *Research on PISA: Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009*, Springer, New York, pp. 23-27.

Watson, J.M. et **R. Callingham** (2003), « Statistical literacy: A complex hierarchical construct », *Statistics Education Research Journal*, vol. 2/2, pp. 3-46.

Wang, S. et al. (2007), « A meta-analysis of testing mode effects in Grade K-12 mathematics tests », *Educational and Psychological Measurement*, vol. 67, pp. 219-238.



Extrait de :

PISA 2015 Assessment and Analytical Framework

Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving

Accéder à cette publication :
https://doi.org/10.1787/9789264281820-en

Merci de citer ce chapitre comme suit :

OCDE (2018), « Cadre d'évaluation de la culture mathématique de l'enquête PISA 2015 », dans *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework : Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*, Éditions OCDE, Paris.

DOI: https://doi.org/10.1787/9789264297203-5-fr

Cet ouvrage est publié sous la responsabilité du Secrétaire général de l'OCDE. Les opinions et les arguments exprimés ici ne reflètent pas nécessairement les vues officielles des pays membres de l'OCDE.

Ce document et toute carte qu'il peut comprendre sont sans préjudice du statut de tout territoire, de la souveraineté s'exerçant sur ce dernier, du tracé des frontières et limites internationales, et du nom de tout territoire, ville ou région.

Vous êtes autorisés à copier, télécharger ou imprimer du contenu OCDE pour votre utilisation personnelle. Vous pouvez inclure des extraits des publications, des bases de données et produits multimédia de l'OCDE dans vos documents, présentations, blogs, sites Internet et matériel d'enseignement, sous réserve de faire mention de la source OCDE et du copyright. Les demandes pour usage public ou commercial ou de traduction devront être adressées à rights@oecd.org. Les demandes d'autorisation de photocopier une partie de ce contenu à des fins publiques ou commerciales peuvent être obtenues auprès du Copyright Clearance Center (CCC) info@copyright.com ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC) contact@cfcopies.com.

OCDE